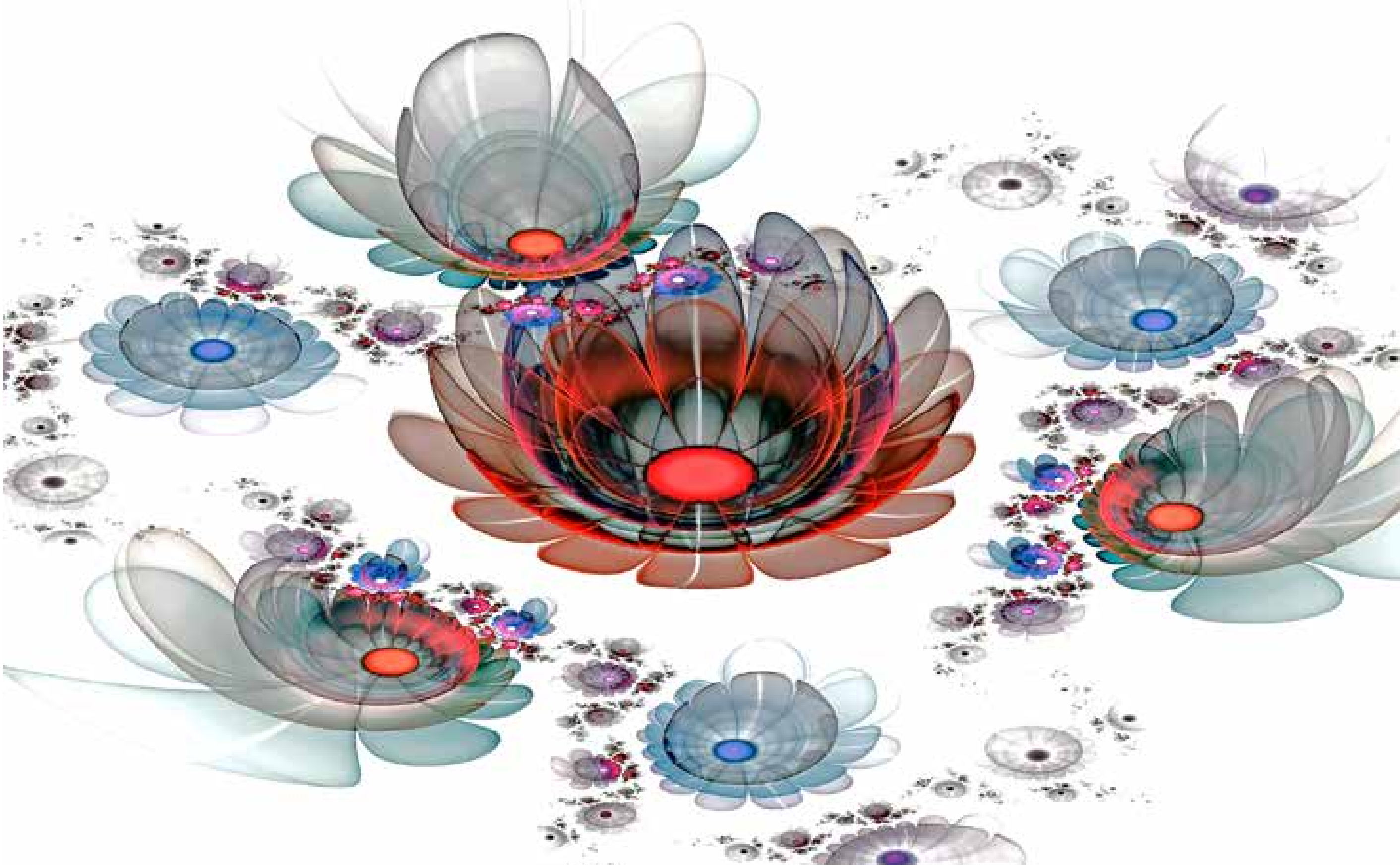
Promath Editions

FORMELSAMMLUNG MATHE

für die Berufsmaturität

SECHSTE AUFLAGE



Jean-Pierre Favre

Algebra

Einführung

Griechisches Alphabet

Kleinbuchstabe	Grossbuchstabe	Name	Kleinbuchstabe	Grossbuchstabe	Name
α	A	Alpha	ν	N	Ny
β	B	Beta	ξ	Ξ	Xi
γ	Γ	Gamma	o	O	Omikron
δ	Δ	Delta	Π	Π	Pi
ϵ	E	Epsilon	ρ	P	Rho
ζ	Z	Zeta	σ	Σ	Sigma
η	H	Eta	τ	T	Tau
θ	Θ	Theta	υ	Υ	Ypsilon
ι	I	Iota	ϕ	Φ	Phi
$\varkappa$	K	Kappa	χ	X	Chi
λ	Λ	Lambda	ψ	Ψ	Psi
μ	M	My	ω	Ω	Omega

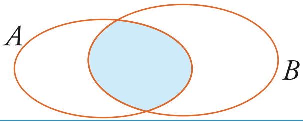
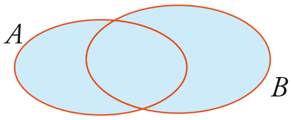
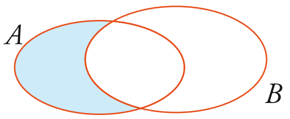
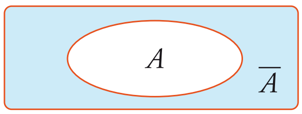
Mengen und Intervalle

- $x \in A$ bedeutet, dass x ein Element der Menge A ist
- $A \subset B$ bedeutet, dass die Menge A eine Teilmenge von B ist

Zahlbereiche

Natürliche Zahlen	$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$
Ganze Zahlen	$\mathbb{Z} = \{\ldots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \cdots\}$
Rationale Zahlen	$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z} \text{ und } q \neq 0\right\}$
Reelle Zahlen	$\mathbb{R}$

Venn-Diagramme

	**Schnittmenge**	
	$A \cap B$	A und B
	**Vereinigungsmenge**	
	$A \cup B$	A oder B
	**Differenzmenge**	
	$A \setminus B$	A ohne B
	**Komplementmenge**	
	$\overline{A}$	nicht A

Intervalle

- Abgeschlossenes Intervall $[\,a\,;\,b\,]$ $a \leq x \leq b$
- Offenes Intervall $]\,a\,;\,b\,[$ $a < x < b$
- Rechtsoffenes Intervall $[\,a\,;\,+\infty\,[$ $x \geq a$
- Linksoffenes Intervall $]-\infty\,;\,b\,]$ $x \leq b$

Algebra

Potenzen und Wurzeln

$0^n = 0$	$x^0 = 1$	0^0ist nicht definiert!	$1^n = 1$
$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$	$\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$	$x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n$	$\dfrac{x^n}{y^n} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^n$
$x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$	$(x^m)^n = x^{m \cdot n}$	$x^{m^n} = x^{(m^n)}$	$\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$
$\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$	$\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert$	$\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y}$	$\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$

Wissenschaftliche Notation

Darstellung einer Zahl in der Form:

$$\pm a \times 10^n \quad \text{mit } a \in [1\,;\,10[\text{ und } n \in \mathbb{Z}$$

- *Beispiel:* $1234 = 1,234 \times 10^3$

Besondere Identitäten

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$	$a^2 + b^2$ ist nicht faktorisierbar in $\mathbb{R}$
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

Faktorisierung

- Ausklammern: $6a - 3ab = 3a(2-b)$
- Ausklammern und Zusammenfassen: $x^3 + x^2 + x + 1 = x^2(x+1) + 1(x+1) = (x+1)(x^2+1)$
- Verwendung einer besonderen Identität: $(x+a)^2 - 1 = (x+a-1)(x+a+1)$
- Einfaches Trinom (Satz von Viëta): $x^2 + Sx + P = x^2 + (m+n)x + m \cdot n = (x+m)\cdot(x+n)$

Betrag

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{wenn } x \geq 0 \\ -x, & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

$a \geq 0$	$a < 0$
$|x| = a \;\rightarrow\; x = a$ oder $x = -a$	$|x| = a \rightarrow x = \varnothing$
$|x| \leq a \;\rightarrow\; x \leq a$ und $x \geq -a$	$|x| \leq a \rightarrow x = \varnothing$
$|x| \geq a \;\rightarrow\; x \geq a$ oder $x \leq -a$	$|x| \geq a \rightarrow x = \mathbb{R}$

Distanz, Abstand zwischen zwei Werten $\rightarrow$ $d(a;b) = |a-b|$

Lineare Gleichungen und Funktionen

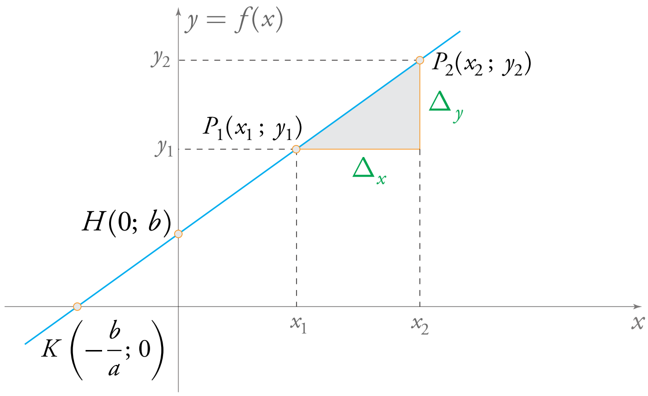
Lineare Gleichung

$$ax+b=0 \quad \text{mit } a\neq 0 \qquad \rightarrow \qquad x=-\frac{b}{a}$$

Lineare Funktion

$$f(x)=ax+b \quad \text{mit } a\neq 0$$

- y-Achsenabschnitt: $f(0)=b \qquad \rightarrow \qquad H(0\,;\,b)$
- x-Achsenabschnitt: $f(x)=0 \qquad \rightarrow \qquad K\left(-\frac{b}{a}\,;\,0\right)$
- Steigung der Geraden f: $\quad a=\frac{\Delta_y}{\Delta_x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$



Gleichung einer Geraden durch zwei Punkte

Die Punkte seien $P_1(x_1\,;\,y_1)$ und $P_2(x_2\,;\,y_2)$. Man erhält die Geradengleichung durch Lösen des Gleichungssystems:

$$\boxed{\begin{cases} a\cdot x_1+b=y_1 \\ a\cdot x_2+b=y_2 \end{cases}}$$

Besondere Geraden

Es seien: $y_1=a_1\,x+b_1$ und $y_2=a_2\,x+b_2$

- $y_1 \,//\, y_2 \Rightarrow a_1=a_2$
- $y_1 \perp y_2 \Rightarrow a_1\cdot a_2=-1$

Quadratische Gleichungen und Funktionen

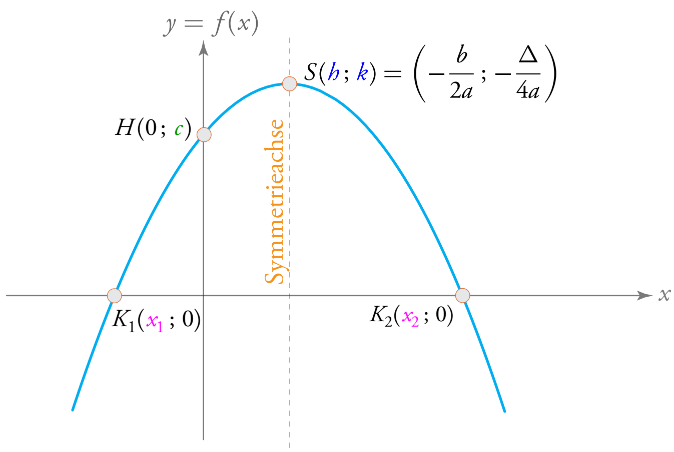
Quadratische Gleichung

$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$ Berechnung der Diskriminante $\Delta = b^2 - 4ac$

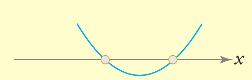
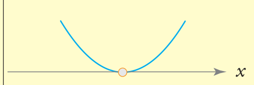
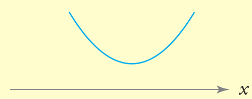
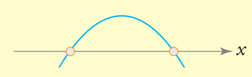
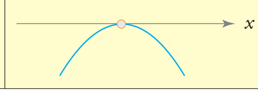
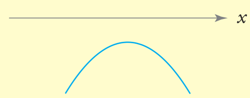
$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$x_1 \,;\, x_2 = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$	keine Lösung in $\mathbb{R}$

Quadratische Funktion

- Grundform: $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a \neq 0$
- Scheitelform: $f(x) = a \cdot (x - h)^2 + k$ mit $a \neq 0$ und Scheitelpunkt $S(h\,;\,k)$
- Produktform: $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ mit $a \neq 0$ und $x_1\,;\,x_2$ den Lösungen von $f(x) = 0$



- Form und Lage des Graphen:

a \ Δ	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Exponential- und Logarithmusgleichungen/-funktionen

Exponential- und Logarithmusgleichung

$y = \log_a(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = a^y \qquad (x > 0,\, a > 0,\, a \neq 1)$	
$a^x = a^y \quad \Leftrightarrow \quad x = y$	$\log_a(x) = \log_a(y) \quad \Leftrightarrow \quad x = y$

- $\log(x) = \log_{10}(x)$ $\rightarrow$ Taste LOG auf dem Taschenrechner
- $\ln(x) = \log_e(x)$ $\rightarrow$ Taste LN auf dem Taschenrechner $(e \simeq 2{,}718)$

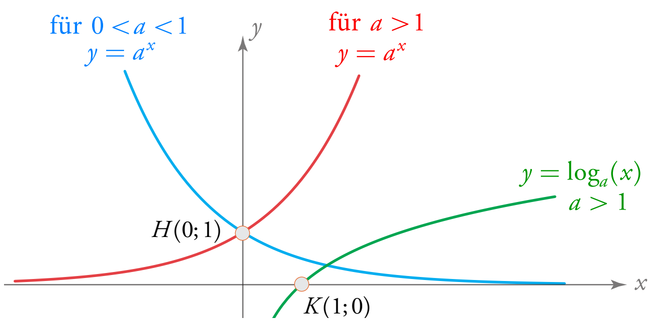
$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$	$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$	$\log_a(x^n) = n \cdot \log_a(x)$
$\log_a(a^x) = x$	$a^{\log_a(x)} = x$
$\log_a(1) = 0$	$\log_a(a) = 1$

- Rechenregel für den Basiswechsel (mit dem Taschenrechner):

$$\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)} = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Exponential- und Logarithmusfunktion

- $f(x) = a^x$ und $g(x) = \log_a(x)$ mit $a \in]0;1[\cup]1;\infty[$

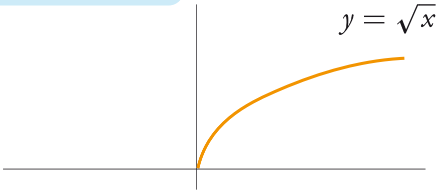


Exponentielle Wachstums- und Zerfallsprozesse

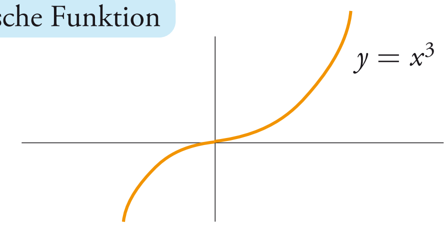
- $f(t) = a \cdot (1+b)^t$ mit $\pm b$ der Wachstums-/Zerfallsrate und a dem Anfangswert
- $f(t) = \alpha \cdot e^{\beta t}$ mit $\pm\beta$ der Wachstums-/Zerfallskonstanten und α dem Anfangswert

Graphen einiger elementarer Funktionen

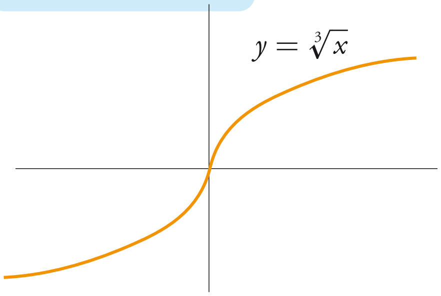
Wurzelfunktion



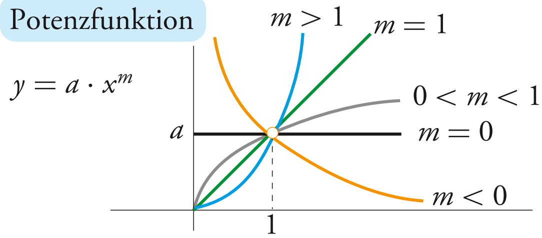
kubische Funktion



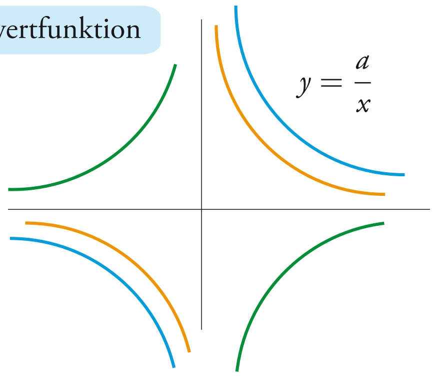
Kubikwurzelfunktion



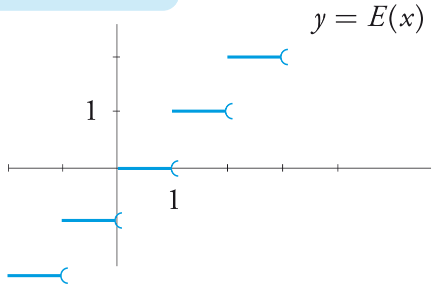
Potenzfunktion



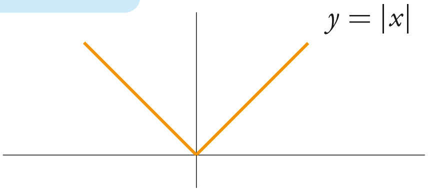
Kehrwertfunktion



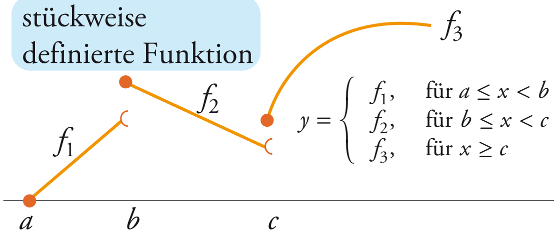
Ganzzahl-Funktion



Betragsfunktion



stückweise definierte Funktion



Definitionsbereich

Aufgepasst werden muss bei folgenden Punkten (☺ = ein beliebiger algebraischer Ausdruck):

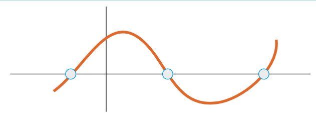
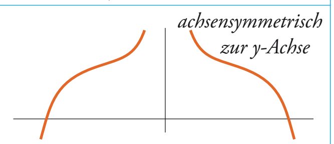
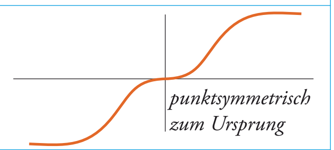
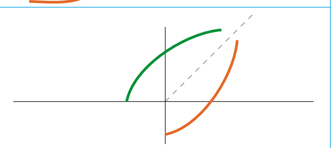
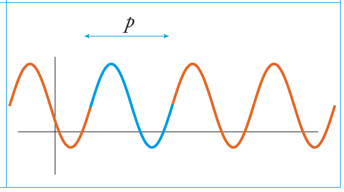
$$\begin{cases} \dfrac{1}{\text{☺}} & \Rightarrow \quad \text{☺} \neq 0 \\ \sqrt[n]{\text{☺}} & \Rightarrow \quad \text{☺} \geq 0 \qquad \textit{nur für gerade } n \\ \log_a(\text{☺}) & \Rightarrow \quad \text{☺} > 0 \qquad \textit{unabhängig von der Basis des Logarithmus} \end{cases}$$

Beispiel: $f(x) = \dfrac{x}{2-x} + \sqrt{x+5} - \log(10-x)$

- $2 - x \neq 0 \quad \rightarrow \quad x \neq 2$ *Bedingung für den Nenner*
- $x + 5 \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \geq -5$ *Bedingung für die Quadratwurzel*
- $10 - x > 0 \quad \rightarrow \quad x < 10$ *Bedingung für den Logarithmus*

Folgerung: $x \in [-5; 2[\cup]2; 10[$

Weitere Eigenschaften von Funktionen

Nullstellen einer Funktion Werte von x, für welche gilt: $f(x) = 0$	
Gerade Funktion $f(-x) = f(x)$ für alle x aus dem Definitionsbereich	
Ungerade Funktion $f(-x) = -f(x)$ für alle x aus dem Definitionsbereich	
Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ $f^{-1}(f(x)) = f\left(f^{-1}(x)\right) = x$ für alle x aus dem Definitionsbereich	
Periodische Funktion $f(x + k \cdot p) = f(x)$ für alle x aus dem Definitionsbereich und $k \in \mathbb{Z}$	

Datenanalyse

Statistische Variablen

qualitativ	
Ausprägung	abs. Häufigkeit (n_i)
verheiratet	3
geschieden	5
ledig	2

diskret quantitativ	
Ausprägung (x_i)	n_i
3	3
4	5
5	2

stetig quantitativ		
Klasse	x_i	n_i
$[2;\ 4[$	3	4
$[4;\ 6[$	5	12
$[6;\ 8[$	7	4

Definitionen und Grundformeln

- X = statistische Variable oder Merkmal
- k = Anzahl Merkmalsausprägungen oder Klassen (im obigen Beispiel $k = 3$)
- i = i-te Ausprägung oder Klasse, mit $i = 1, 2, 3, \dots, k$
- b_{i-1} = untere Grenze der Klasse i
- b_i = obere Grenze der Klasse i
- L_i = Klassenbreite der Klasse i

$$L_i = b_i - b_{i-1}$$

- x_i = Klassenmitte der Klasse i

$$x_i = \frac{b_{i-1} + b_i}{2}$$

- n_i = absolute Häufigkeit der Ausprägung bzw. Klasse i
- N = Gesamtzahl der Messwerte

$$N = n_1 + n_2 + \cdots + n_k \qquad \text{bzw.} \qquad N = \sum n_i$$

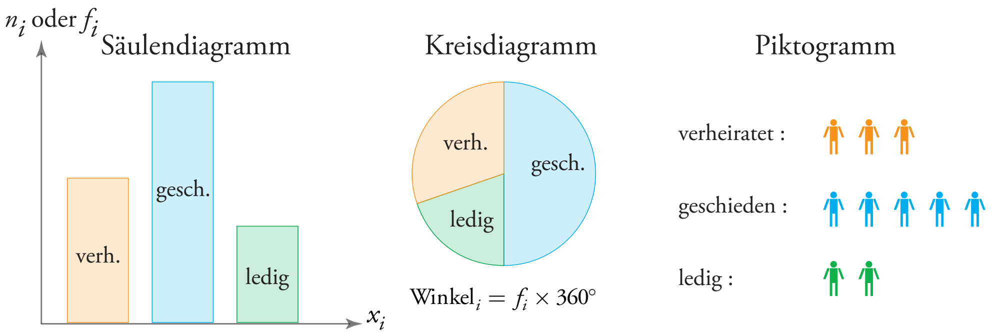
- f_i = relative Häufigkeit der Ausprägung bzw. Klasse i $\qquad f_i = n_i / N$

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_k = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad \sum_i f_i = 1$$

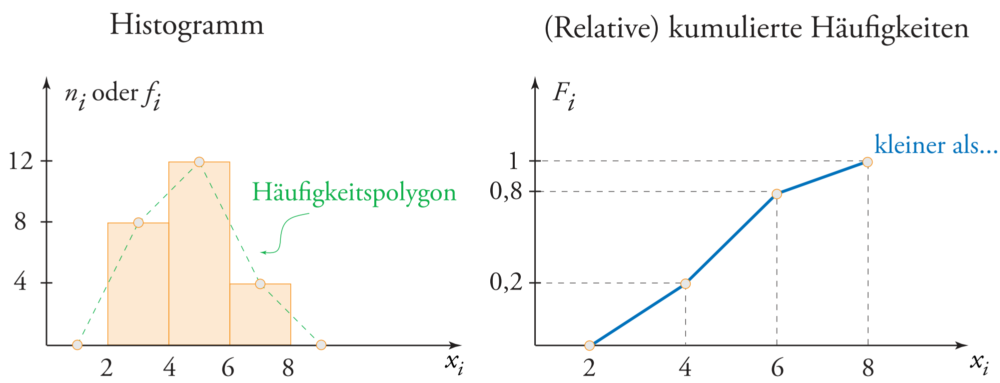
- F_i = relative kumulierte Häufigkeit der Ausprägung bzw. Klasse i $\qquad F_i = f_1 + f_2 + \cdots + f_i$

Grafische Darstellung

- Qualitative + diskrete quantitative Variablen: verschiedene Diagramme



- Stetige quantitative Variablen: Histogramm



Verwendung der kumulierten Häufigkeiten

Anteil P der Messwerte, deren Ausprägung kleiner oder gleich x_i ist

$$F_i = P(X \leq x_i)$$

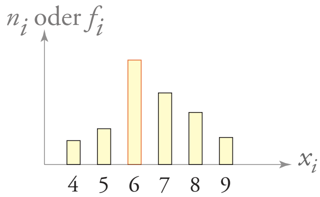
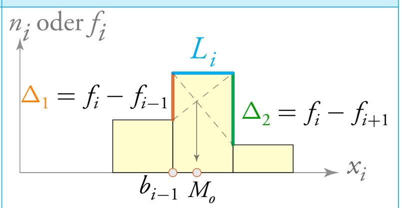
$$P(a < X \leq b) = F_b - F_a$$

Beispiel (stetige Variable): Anteil der Messwerte zwischen $]4;7] = F_7 - F_4$

- $F_7 = \frac{0,8+1}{2} = 0,9$ [*durch Interpolation*] • $F_4 = 0,2$

Somit ist: $F_7 - F_4 = 0,9 - 0,2 = 0,7$ d.h. 70% der Messwerte

Lageparameter

Parameter	Notation	diskrete Variable	kontinuierliche Variable
Modus	M_o	 $M_o = 6$	 $M_o = b_{i-1} + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \cdot L_i$
Median	M_e	erstes x_i für welches $F_i > 0,5$ wenn $F_i = 0,5 \to M_e = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$	$M_e = b_{i-1} + \frac{0,5 - F_{i-1}}{f_i} \cdot L_i$ für die erste Klasse mit $F_i \geq 0,5$
1. Quartil	Q_1	erstes x_i für welches $F_i \geq 0,25$	$Q_1 = b_{i-1} + \frac{0,25 - F_{i-1}}{f_i} \cdot L_i$ für die erste Klasse mit $F_i \geq 0,25$
3. Quartil	Q_3	erstes x_i für welches $F_i \geq 0,75$	$Q_3 = b_{i-1} + \frac{0,75 - F_{i-1}}{f_i} \cdot L_i$ für die erste Klasse mit $F_i \geq 0,75$

- Berechnung des Medians von N in aufsteigender Reihenfolge sortierten Messwerten

$$M_e = \begin{cases} x_{(N+1)/2} & \text{für ungerade } N \\ \frac{x_{N/2} + x_{N/2+1}}{2} & \text{für gerade } N \end{cases}$$

- Arithmetisches Mittel ($\overline{x}$)

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{N} = \frac{n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + \cdots + n_k \cdot x_k}{N} = f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 + \cdots + f_k \cdot x_k$$

oder in abgekürzter Schreibweise: $\overline{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{\sum n_i \cdot x_i}{N} = \sum f_i \cdot x_i$

Streuungsparameter

- Spannweite $= \begin{cases} \text{Differenz zwischen dem grössten und kleinsten } x_i & \text{(diskret)} \\ \text{Gesamtbreite } b_k - b_0 & \text{(stetig)} \end{cases}$

- Quartilsabstand (QA) und Semiquartilsabstand (SQA)

$$\mathrm{QA} = Q_3 - Q_1 \qquad \text{oder} \qquad \mathrm{SQA} = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

- Varianz (σ^2) und Standardabweichung (σ) einer nach Ausprägung gruppierten Datenreihe (x_i und f_i)

$$\sigma^2 = f_1(x_1 - \overline{x})^2 + f_2(x_2 - \overline{x})^2 + \cdots + f_k(x_k - \overline{x})^2$$
$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

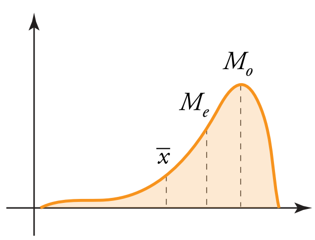
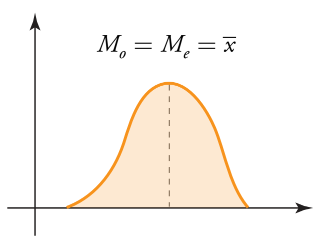
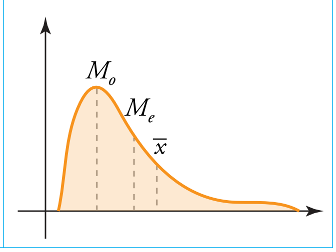
Verschiebungssatz: $\overline{x^2} = f_1 \cdot x_1^2 + f_2 \cdot x_2^2 + \cdots + f_k \cdot x_k^2$

$$\sigma^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2$$

- Variationskoeffizient (v)

$$v = \frac{\sigma}{\overline{x}} \times 100 \quad (v \geq 25\% \rightarrow \text{stark gestreut})$$

Schiefemasse

linksschief	symmetrisch	rechtsschief
		

Zentrale Momente

- Zentrales Moment 3. Ordnung: $\mu_3 = f_1(x_1 - \overline{x})^3 + f_2(x_2 - \overline{x})^3 + \cdots + f_k(x_k - \overline{x})^3$

- Zentrales Moment 4. Ordnung: $\mu_4 = f_1(x_1 - \overline{x})^4 + f_2(x_2 - \overline{x})^4 + \cdots + f_k(x_k - \overline{x})^4$

Wichtigste Schiefemasse

- Quartilsschiefe (QS)

$$QS = \frac{Q_3 + Q_1 - 2\,M_e}{Q_3 - Q_1} \qquad \begin{cases} QS > 0 & \text{rechtsschief} \\ QS = 0 & \text{symmetrisch} \\ QS < 0 & \text{linksschief} \end{cases}$$

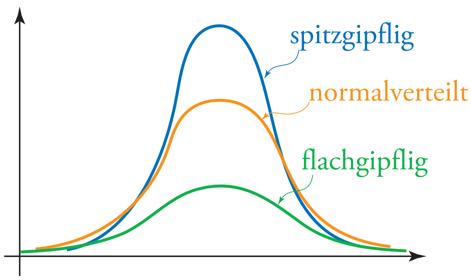
- Schiefekoeffizient nach Pearson (β_1)

$$\beta_1 = 3\frac{(\overline{x} - M_e)}{\sigma} \qquad \begin{cases} \beta_1 \to 1 & \text{rechtsschief} \\ \beta_1 \to 0 & \text{symmetrisch} \\ \beta_1 \to -1 & \text{linksschief} \end{cases}$$

- Momentschiefe (γ_1)

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \qquad \begin{cases} \gamma_1 > 0 & \text{rechtsschief} \\ \gamma_1 = 0 & \text{symmetrisch} \\ \gamma_1 < 0 & \text{linksschief} \end{cases}$$

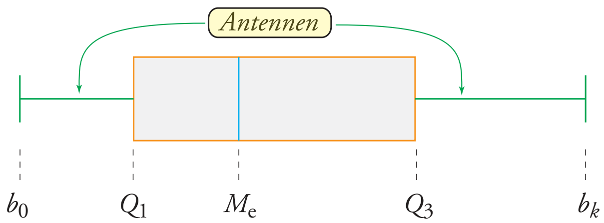
Wölbungsmasse

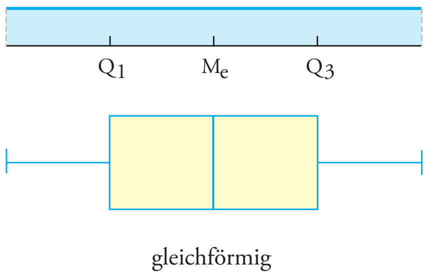


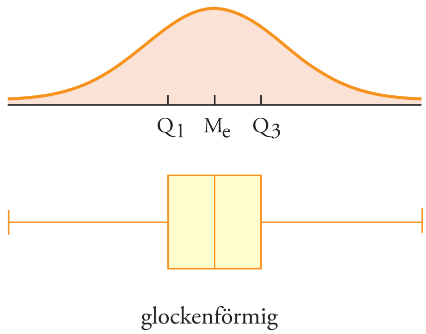
- Wölbungskoeffizient nach Pearson (β_2)

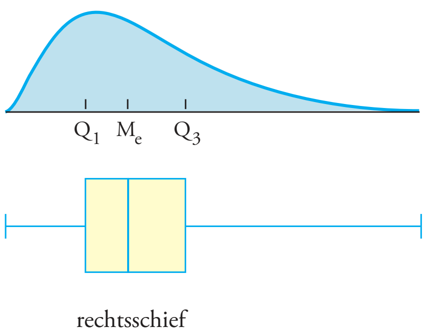
$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} \qquad \begin{cases} \beta_2 > 3 \Rightarrow \text{spitzgipflig} \\ \beta_2 = 3 \Rightarrow \text{normalverteilt} \\ \beta_2 < 3 \Rightarrow \text{flachgipflig} \end{cases}$$

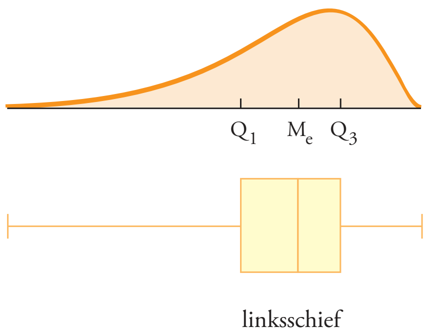
Boxplot-Kastengrafik











Ausreisser

Mögliche Änderung der Extremwerte b_0 und b_k. Signalisierung der Werte der Reihe, die dieses Intervall verlassen, durch einen kleinen Punkt:

- b_0' = kleinster beobachteter Wert der Reihe $\geq [Q_1 - 1,5 \times (Q_3 - Q_1)]$
- b_k' = grösster beobachteter Wert der Reihe $\leq [Q_3 + 1,5 \times (Q_3 - Q_1)]$

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Inferenzstatistik

Wahrscheinlichkeitsrechnung

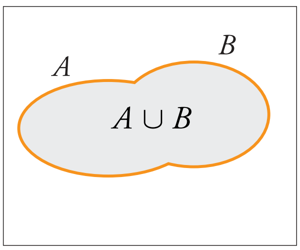
Ereignisse und Wahrscheinlichkeit

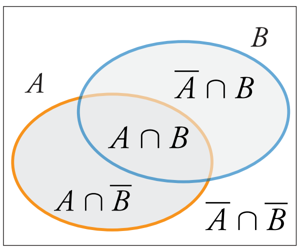
- Ω: Ergebnismenge (sicheres Ereignis)
- $\varnothing$: unmögliches Ereignis
- $\overline{A}$: komplementäres Ereignis oder Gegenereignis von A
- $A \cup B$: Ereignis A ODER B
- $A \cap B$: Ereignis A UND B
- $P(A)$: Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A

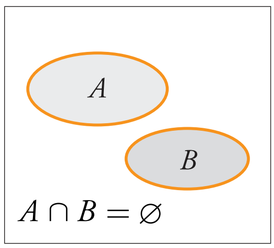
$$P(A) = \frac{\text{Anzahl günstiger Fälle}}{\text{Anzahl möglicher Fälle}}$$ wenn die Ereignisse gleich wahrscheinlich sind

Eigenschaften

$P(\Omega) = 1$	$P(\varnothing) = 0$	$0 \leq P(A) \leq 1$	$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$		$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(A \cap B)$	
$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B)$		$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$	







Inkompatible und unabhängige Ereignisse

- A und B sind inkompatibel, wenn : $A \cap B = \varnothing \quad \rightarrow \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- A und B sind unabhängig, wenn : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

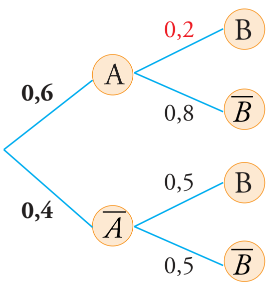
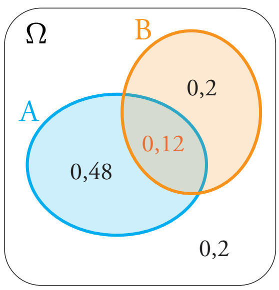
Geometrische Wahrscheinlichkeit

eindimensionaler Fall	zweidimensionaler Fall
$P(A) = \dfrac{\text{Länge von } A}{\text{Länge von } S}$ 	$P(A) = \dfrac{\text{Fläche von } A}{\text{Fläche von } S}$ 

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \text{Wahrscheinlichkeit von } B\text{, falls } A \text{ bereits eingetreten ist.}$$

Schemata zur Ermittlung der Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeitsbaum	Venn-Diagramm	Häufigkeitstabelle
		siehe unten

	A	$\overline{A}$	Total
B	0,12	0,2	0,32
$\overline{B}$	0,48	0,2	0,68
Total	**0,6**	**0,4**	1

Verschiedene Arten von Wahrscheinlichkeiten:

- A-priori-Wahrscheinlichkeit : $P(A) = 0,6$
- Zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit : $P(A \cap B) = 0,6 \times 0,2 = 0,12$
- Totale Wahrscheinlichkeit : $P(B) = 0,6 \times 0,2 + 0,4 \times 0,5 = 0,32$
- Bedingte Wahrscheinlichkeit : $P(B/A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0,12}{0,6} = 0,2$
- A-posteriori-Wahrscheinlichkeit : $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,12}{0,32} = 0,375$

Diskrete Zufallsvariablen

X nimmt die Werte $x_1; x_2; \cdots x_n$ mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1; p_2; \cdots; p_n$ an, wobei

$$p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n = 1 \qquad \text{oder} \qquad \sum p_i = 1.$$

Indikator	Notation	Formel
Erwartungswert	$E(X)$	$E(X) = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \cdots + p_n \cdot x_n$
Erwartungswert von X^2	$E(X^2)$	$E(X^2) = p_1 \cdot x_1^2 + p_2 \cdot x_2^2 + \cdots + p_n \cdot x_n^2$
Varianz	$V(X)$	$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ Verschiebungssatz
Standardabweichung	$\sigma(X)$	$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$F(X) = P(X \leq x_i)$$
$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

Inferenzstatistik

Notationen

Grundgesamtheit		Stichprobe	
Gesamtanzahl	N	Grösse	n
Mittelwert	μ	Mittelwert	$\overline{x}$
Standardabweichung	σ	Standardabweichung	S
Anteilswert	π	Anteilswert	$f = n_i / n$

In der Inferenzstatistik wird bei der Berechnung der Standardabweichung von Stichproben die **Stichprobenstandardabweichung** S verwendet. Diese dient dann als **Schätzwert** für die Standardabweichung der Grundgesamtheit. Die Stichprobenstandardabweichung wird wie folgt berechnet:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}} \qquad \text{Sx-Wert auf TI-Rechnern}$$

Konfidenzintervalle

Konfidenzintervall für den Mittelwert einer Grundgesamtheit

1. Der geschätzte Mittelwert μ der Grundgesamtheit entspricht dem Mittelwert $\overline{x}$ der Stichprobe.
2. Die Grundgesamtheitsstandardabweichung σ kann aus der Stichprobenstandardabweichung S geschätzt werden.

Dann kann μ durch Eingrenzen wie folgt geschätzt werden: $\overline{x} \pm$ Fehlerbereich

$$\mu \in \left[\overline{x} - z \times \frac{S}{\sqrt{n}} \quad ; \quad \overline{x} + z \times \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$

Ermittlung von z:

Konfidenzniveau	90%	95%	98%	99%
z	1,64	1,96	2,33	2,58

Nutzungsbedingungen: $n \geq 30$

Konfidenzintervall für einen Anteilswert an einer Grundgesamtheit

Eine Zufallsstichprobe wird mit Zurücklegen gezogen und innerhalb der Stichprobe ein beliebiger Anteilswert untersucht: $f = n_i / n$.
Dann kann man schliessen, dass der relative Anteil π an der Grundgesamtheit sich innerhalb des folgenden Konfidenzintervalls befindet: $f \pm$ Fehlerbereich

$$\pi \in \left[f - z \cdot \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \quad ; \quad f + z \cdot \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \right]$$

Ermittlung von z:

Konfidenzniveau	90%	95%	98%	99%
z	1,64	1,96	2,33	2,58

Nutzungsbedingungen: $n \geq 30$ $\quad n \times f \geq 5$ $\quad n \times (1-f) \geq 5$

Prognoseintervalle und Statistische Tests

Bei der Arbeit an statistischen Tests sprechen wir über **Fehlerrisiko**:

$$\text{Fehlerrisiko} = 1 - \text{Konfidenzniveau}$$

Test auf einen bestimmten Mittelwert

Mithilfe dieses Tests kann man herausfinden, ob der Mittelwert μ einer Grundgesamtheit gleich oder verschieden von einem Durchschnitt ist, der für eine Stichprobe $\overline{x}$ berechnet wurde.

1. Formulieren der Nullhypothese H_0 und der Alternativhypothese H_1

$$\begin{aligned} \text{Nullhypothese: } H_0: &\quad \mu = \overline{x} \\ \text{alternativhypothese: } H_1: &\quad \mu \neq \overline{x} \quad [\text{zweiseitiger Test}] \end{aligned}$$

2. Wahl des Fehlerrisikos α bzw. des Konfidenzniveaus $(1-\alpha)$ und Bestimmung von z

Fehlerrisiko	1%	2%	5%	10%
z	2,58	2,33	1,96	1,64

3. Berechnung des Prognoseintervalls:

$$\mu \pm z \times \frac{\sigma \text{ oder } S}{\sqrt{n}}$$

4. Annahme von H_0 wenn $\overline{x} \in$ Prognoseintervall

Nutzungsbedingungen: $n \geq 30$

Test auf einen bestimmten Anteilswert

Mithilfe dieses Tests kann man herausfinden, ob ein Anteilswert π gleich oder verschieden von einem Anteilswert ist, der für eine Stichprobe f berechnet wurde.

1. Formulieren der Nullhypothese H_0 und der Alternativhypothese H_1

$$\begin{aligned} \text{Nullhypothese: } H_0: &\quad \pi = f \\ \text{alternativhypothese: } H_1: &\quad \pi \neq f \quad [\text{zweiseitiger Test}] \end{aligned}$$

2. Wahl des Fehlerrisikos α bzw. des Konfidenzniveaus $(1-\alpha)$ und Bestimmung von z

Fehlerrisiko	1%	2%	5%	10%
z	2,58	2,33	1,96	1,64

3. Berechnung des Prognoseintervalls:

$$\pi \pm z \times \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}$$

4. Annahme von H_0 wenn $f \in$ Prognoseintervall

Nutzungsbedingungen: $n \geq 30$ $\quad n \cdot \pi \geq 5$ $\quad n \cdot (1-\pi) \geq 5$

Geometrie

Trigonometrie

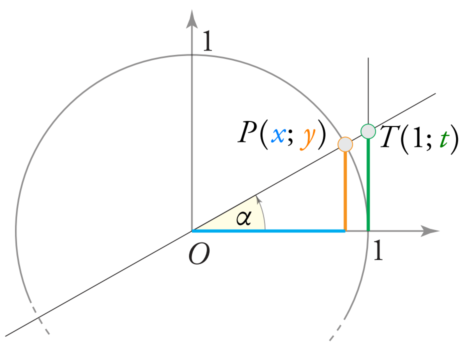
Umrechnung Grad (DEG) - Bogenmass (RAD)

$$\frac{\text{Grad}}{180} = \frac{\text{Bogenmass}}{\pi}$$

Einige spezielle Winkel

Grad	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$150°$	$180°$	$360°$
Bogenmass	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π	2π

Einheitskreis



$\sin(\alpha) = y$

$\cos(\alpha) = x$

$\tan(\alpha) = t$

Trigonometrische Beziehungen

$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$	$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$	$\frac{1}{\cos^2(\alpha)} = 1 + \tan^2(\alpha)$

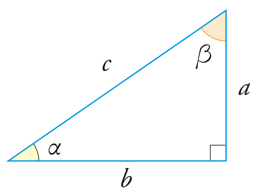
Exakte Werte für einige besondere Winkel

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(\alpha)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-

Zusammenhänge zwischen Winkeln

$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$	$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$	$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$	$\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$
$\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$	$\tan(\pi + \alpha) = \tan(\alpha)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$	
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin(\alpha)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(\alpha)$	

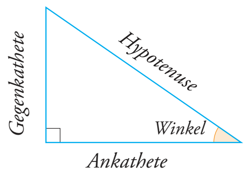
Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck



$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} \qquad \cos(\alpha) = \frac{b}{c} \qquad \tan(\alpha) = \frac{a}{b}$$

$$\sin(\beta) = \frac{b}{c} \qquad \cos(\beta) = \frac{a}{c} \qquad \tan(\beta) = \frac{b}{a}$$

Mit der folgenden Eselsbrücke kann man sich die Formeln schneller einprägen (dabei steht *G* für Gegenkathete, *A* für Ankathete und *H* für Hypotenuse): *sin-GH*, *cos-AH* und *tan-GA*. Auf Englisch SOH-CAH-TOA.



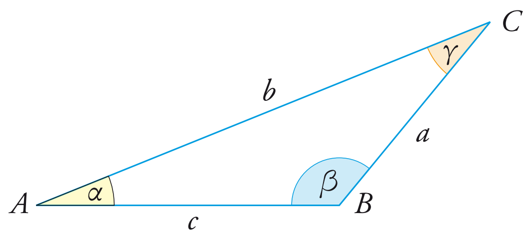
Trigonometrie im beliebigen Dreieck

Sinussatz

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Kosinussatz

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$$

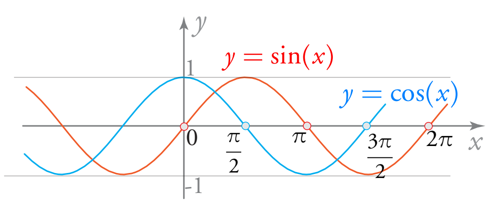


Grundlegende trigonometrische Gleichungen

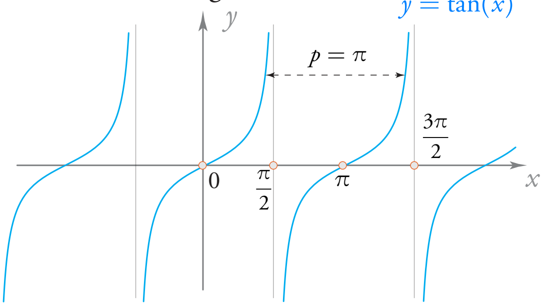
- $\cos(x) = a \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = \cos^{-1}(a) + k \cdot 2\pi \\ x = -\cos^{-1}(a) + k \cdot 2\pi \end{cases}$ mit $k \in \mathbb{Z}$
- $\sin(x) = a \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = \sin^{-1}(a) + k \cdot 2\pi \\ x = \pi - \sin^{-1}(a) + k \cdot 2\pi \end{cases}$ mit $k \in \mathbb{Z}$
- $\tan(x) = a \quad \rightarrow \quad \{\ x = \tan^{-1}(a) + k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$

Grundlegende trigonometrische Funktionen

Sinus- und Kosinusfunktion

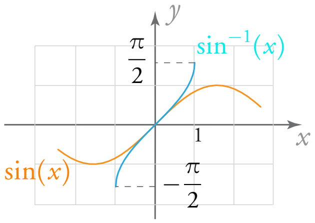


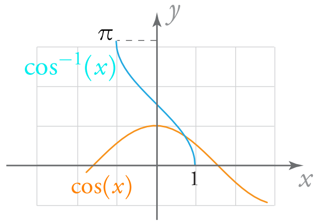
Tangensfunktion

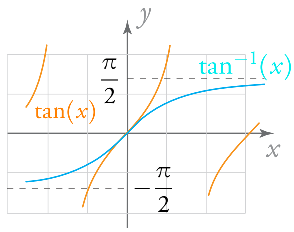


Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen

Trigonometrische Funktion	Definitionsbereich Werte von x	Wertebereich Werte von y
$\sin^{-1}(x)$	$[-1;1]$	$[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$
$\cos^{-1}(x)$	$[-1;1]$	$[0;\pi]$
$\tan^{-1}(x)$	$\mathbb{R}$	$]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$



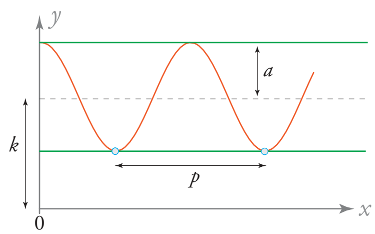




Sinusförmige Funktionen

Allgemeine Form: $y = a \cdot \cos(b(x-h)) + k$ oder $y = a \cdot \sin(b(x-h)) + k$

- a = Amplitude der Funktion (vertikale Streckung/Stauchung)
- p = Periode der Funktion
- b = horizontale Streckung/Stauchung $\quad b = \dfrac{2\pi}{p}$
- h = Phasenverschiebung (Horizontalverschiebung)
- k = Position der Mittellage (Vertikalverschiebung)



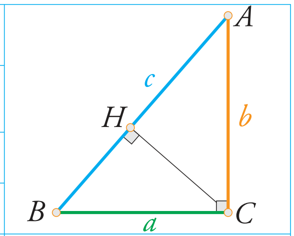
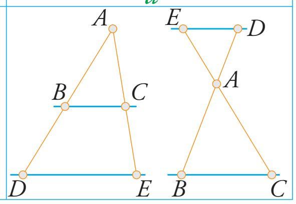
Polarkoordinaten

r und φ sind die Polarkoordinaten eines Punktes $P(x;y)$ in der Ebene.

Polar- in kartesische Koordinaten	kartesische in Polarkoordinaten
$x = r \cdot \cos(\varphi)$ $y = r \cdot \sin(\varphi)$	$r = \sqrt{x^2+y^2}$ $\varphi = \tan^{-1}(y/x) \quad \pm 180°$

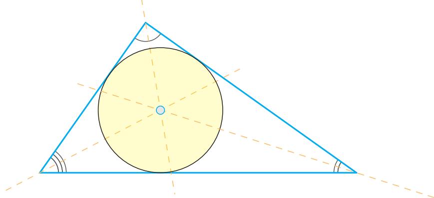
Ebene Geometrie

Beziehungen zwischen Distanzen

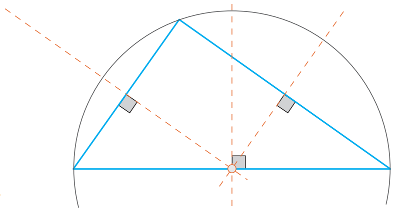
Satz des Pythagoras	$a^2 + b^2 = c^2$	
Höhensatz	$HC^2 = BH \cdot HA$	
Kathetensatz des Euklid	$BC^2 = BH \cdot BA$	
	$AC^2 = AH \cdot AB$	
Strahlensatz	$\dfrac{AC}{AE} = \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BC}{DE}$	

Besondere Geraden im Dreieck

Winkelhalbierende

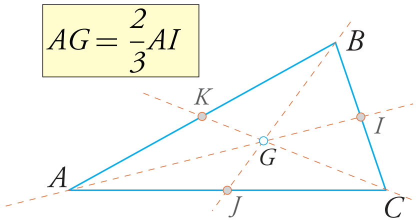


Mittelsenkrechte

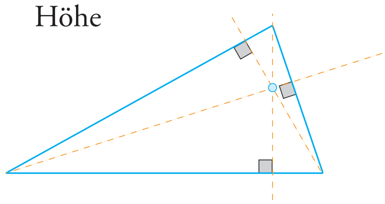


Schwerlinie

$$AG = \frac{2}{3}AI$$



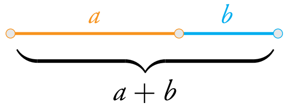
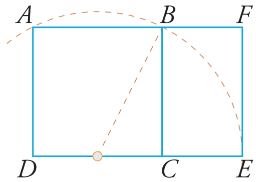
Höhe



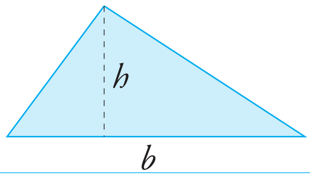
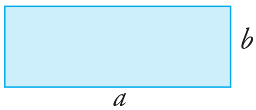
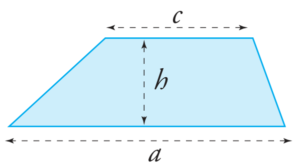
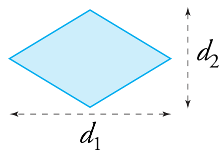
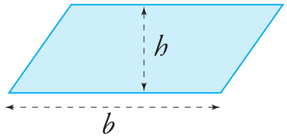
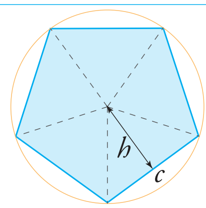
Winkelsumme und Anzahl der Diagonalen

- Die Winkelsumme im Dreieck beträgt 180°.
- Die Winkelsumme eines konvexen n-Ecks beträgt $(n-2) \cdot 180°$.
- Die Anzahl der Diagonalen in einem konvexen n-Eck beträgt $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

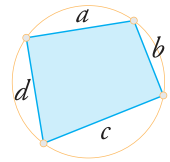
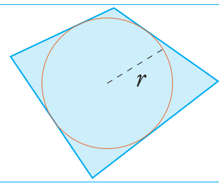
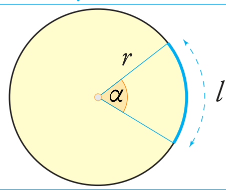
Goldener Schnitt und Goldenes Rechteck

Goldener Schnitt	Goldenes Rechteck
	
$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$	$\frac{AF}{FE} = \frac{BC}{CE} \simeq 1{,}618$

Flächeninhalte einiger elementarer Figuren

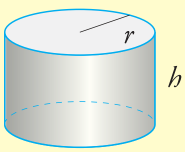
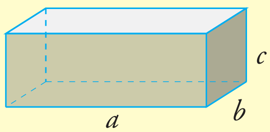
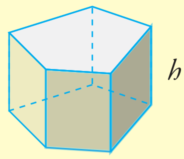
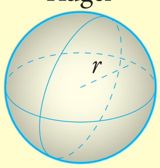
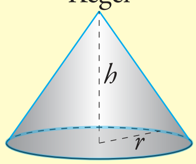
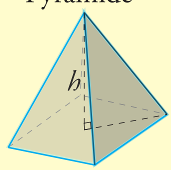
Dreieck	$\mathscr{A} = \frac{b \times h}{2}$	
Rechteck	$\mathscr{A} = a \cdot b$	
Trapez	$\mathscr{A} = \frac{a+c}{2} \cdot h$	
Raute	$\mathscr{A} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$	
Parallelogramm	$\mathscr{A} = b \cdot h$	
Regelmässiges n-Eck	$\mathscr{A} = \frac{c \cdot h}{2} \cdot n$	

Flächeninhalte einiger elementarer Figuren (Fortsetzung...)

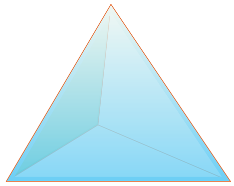
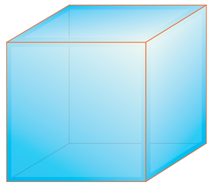
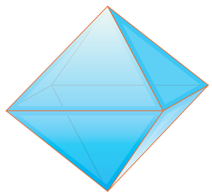
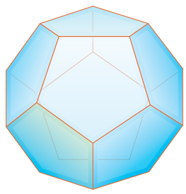
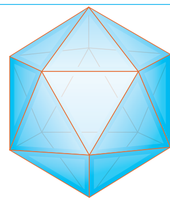
Sehnenviereck	$p = \text{halber Umfang}$ $\mathscr{A} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$	
Tangentenviereck	$p = \text{halber Umfang}$ $\mathscr{A} = r \cdot p$	
Kreissektor	$l = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360}$ $\mathscr{A} = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360}$	

Räumliche Geometrie

Volumina einiger elementarer Körper

Zylinder	Quader	Prisma
		
$\mathscr{V} = \pi r^2 h$	$\mathscr{V} = a \cdot b \cdot c$	$\mathscr{V} = \text{Grundfläche} \cdot h$
Kugel	Kegel	Pyramide
		
$\mathscr{V} = \frac{4}{3}\pi r^3$	$\mathscr{V} = \frac{\pi r^2 h}{3}$	$\mathscr{V} = \frac{\text{Grundfläche} \cdot h}{3}$

Platonische Körper

E : Anzahl Ecken K : Anzahl Kanten F : Anzahl Flächen c : Kantenlänge	$\mathscr{A}$: Flächeninhalt der Seitenflächen $\mathscr{V}$: Volumen Eulersche Polyederformel $E - K + F = 2$	
Tetraeder	$E = 4$ $K = 6$ $F = 4$ $\mathscr{A} = \sqrt{3} \cdot c^2$ $\mathscr{V} = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot c^3$	
Hexaeder (Würfel)	$E = 8$ $K = 12$ $F = 6$ $\mathscr{A} = 6c^2$ $\mathscr{V} = c^3$	
Oktaeder	$E = 6$ $K = 12$ $F = 8$ $\mathscr{A} = 2\sqrt{3} \cdot c^2$ $\mathscr{V} = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot c^3$	
Dodekaeder	$E = 20$ $K = 30$ $F = 12$ $\mathscr{A} = 3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \cdot c^2$ $\mathscr{V} = \frac{15 + 7\sqrt{5}}{4} \cdot c^3$	
Ikosaeder	$E = 12$ $K = 30$ $F = 20$ $\mathscr{A} = 5\sqrt{3} \cdot c^2$ $\mathscr{V} = \frac{15 + 5\sqrt{5}}{12} \cdot c^3$	

Vektorgeometrie in der Ebene

- Beziehung von Chasles: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$
- Kollineare Vektoren: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ kollinear zu $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a_1 \cdot b_2 = a_2 \cdot b_1$
- Koordinaten eines Punktes A: $A(a_1; a_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$
- Mittelpunkt der Strecke AB: $M\left(\dfrac{a_1+b_1}{2}; \dfrac{a_2+b_2}{2}\right)$
- Schwerpunkt des Dreiecks ABC : $G\left(\dfrac{a_1+b_1+c_1}{3}; \dfrac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$
- Betrag eines Vektors: $||\vec{a}|| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$
- Skalarprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}|| \cdot \cos(\alpha)$
- Winkel zwischen zwei Vektoren: $\cos(\alpha) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}||}$
- Senkrechte Vektoren: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Geraden

Steigung einer Geraden mit Richtungsvektor $\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$	$m = \dfrac{d_2}{d_1}$
Steigung einer Geraden durch $A(a_1; a_2)$ und $B(b_1; b_2)$	$m = \dfrac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$
Gleichung einer Geraden durch $(0; h)$ mit Steigung m	$y = mx + h$
Parametergleichung einer Geraden durch $A(a_1; a_2)$ mit Richtungsvektor $\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$
Zwei Geraden mit den Steigungen m_1 und m_2 sind zueinander senkrecht, wenn	$m_1 \cdot m_2 = -1$
Spitzer Winkel zwischen zwei Geraden mit den Steigungen m_1 und m_2	$\tan(\alpha) = \left\lvert \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} \right\rvert$

Distanzen

Distanz zwischen zwei Punkten $A(a_1; a_2)$ und $B(b_1; b_2)$	$\delta(A; B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$
Abstand eines Punktes $P(p_1; p_2)$ von einer Geraden d mit der Gleichung $ax + by + c = 0$	$\delta(P; d) = \dfrac{\lvert a p_1 + b p_2 + c \rvert}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Vektorgeometrie im Raum

- Koordinaten eines Punktes A: $A(a_1; a_2; a_3) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$
- Mittelpunkt der Strecke AB: $M\left(\dfrac{a_1+b_1}{2}; \dfrac{a_2+b_2}{2}; \dfrac{a_3+b_3}{2}\right)$
- Schwerpunkt des Dreiecks ABC: $G\left(\dfrac{a_1+b_1+c_1}{3}; \dfrac{a_2+b_2+c_2}{3}; \dfrac{a_3+b_3+c_3}{3}\right)$
- Betrag eines Vektors: $||\vec{a}|| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
- Skalarprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}|| \cdot \cos(\alpha)$
- Winkel zwischen zwei Vektoren: $\cos(\alpha) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}||}$
- Senkrechte Vektoren: $\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

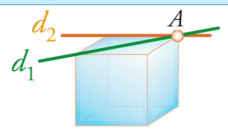
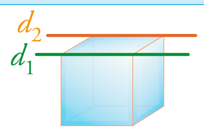
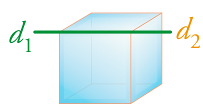
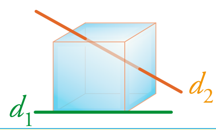
Lage eines Punktes zu einer Geraden

d bezeichnet eine Gerade durch den Punkt $A(a_1; a_2; a_3)$ mit dem Richtungsvektor $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$

Ein Punkt $P(x; y; z)$ liegt auf der Geraden d, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

Vektorgleichung	$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \vec{d}$
Parametergleichung	$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$
Koordinatengleichung	$\dfrac{x-a_1}{d_1} = \dfrac{y-a_2}{d_2} = \dfrac{z-a_3}{d_3}$

Lage zweier Geraden

<table>
<tr><th colspan="3">Komplanar: Es existiert eine Ebene, welche beide Geraden enthält.</th><th>Nicht komplanar</th></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr><td>$d_1 \cap d_2 = \{A\}$</td><td>$d_1 \cap d_2 = \varnothing$</td><td>$d_1 \cap d_2 = d_1 = d_2$</td><td>$d_1 \cap d_2 = \varnothing$</td></tr>
</table>

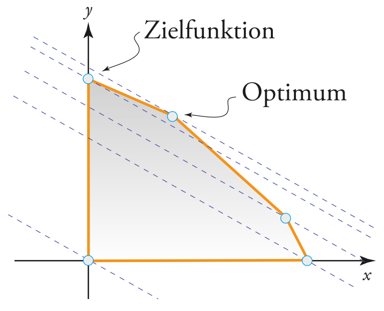
Wirtschaftsmathematik

Lineare Optimierung

- Ziel: Maximierung oder Minimierung einer Funktion $Z = a_1 x + b_1 y$ (Zielfunktion) unter verschiedenen linearen Nebenbedingungen der Form:

$$ax + by \gtrless c \quad \text{oder} \quad x \gtrless 0 \quad \text{oder} \quad y \gtrless 0 \quad \text{etc.}$$

Vorgehen :
1) Graphische Darstellung aller Nebenbedingungen
   => Bereich der zulässigen Lösungen
2) Ermittlung der Koordinaten aller Eckpunkte des Bereichs (durch Lösen von Gleichungssystemen)
3) Berechnung des Funktionswerts von Z in jedem Eckpunkt.
4) Bestimmen des oder der Eckpunkte(s), für welche(n) der Funktionswert von Z maximal bzw. minimal ist



Wachstumsrate

- Gesamtwachstumsrate i zwischen einem Anfangswert V_0 und einem Endwert V_t:

$$i = \frac{V_t - V_0}{V_0} = \frac{V_t}{V_0} - 1$$

- Mittlere jährliche Wachstumsrate t_m über n Jahre:

$$t_m = \sqrt[n]{\frac{V_t}{V_0}} - 1$$

Finanzmathematik

C_0 Anfangskapital

C_n Endkapital

i Jahreszinssatz

n Anlagedauer in Jahren

r Aufzinsfaktor ($r = 1 + i$)

v Diskontierungsfaktor ($v = 1/r$), auch Abzinsfaktor genannt

d definiert als $d = \dfrac{i}{1+i}$

Zinsrechnung

Einfacher Zins	Zinseszins
$C_n = C_0 \cdot (1 + ni)$	$C_n = C_0 \cdot r^n \quad \rightarrow \quad C_0 = C_n \cdot v^n$

Periodenzinssatz

Üblicherweise ist der Zinssatz für einen Zeitraum von einem Jahr definiert. Soll die Verzinsung hingegen monatlich erfolgen, so ist der Monat die neue Zeiteinheit und der Jahreszinssatz i muss in einen Monatszinssatz i_{12} umgerechnet werden.

Einfacher Zins	Zinseszins
$i_{12} = i/12$	$i_{12} = (1+i)^{1/12} - 1$

- Analog können auch Halbjahreszinssatz i_2 und Quartalszinssatz i_4 berechnet werden.

Barwert und Endwert einer Rente von 1 Währungseinheit

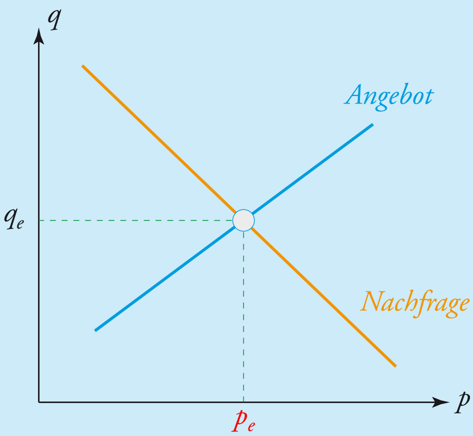
	Barwert	Endwert
Pränumerando-Rente	$\ddot{a}_{\overline{n}\vert} = \dfrac{1-v^n}{d}$	$\ddot{s}_{\overline{n}\vert} = \dfrac{r^n - 1}{d}$
Postnumerando-Rente	$a_{\overline{n}\vert} = \dfrac{1-v^n}{i}$	$s_{\overline{n}\vert} = \dfrac{r^n - 1}{i}$

Endwert V_n einer jährlichen Pränumerando-Rente P, die während n Jahren zu einem Jahreszinssatz i ausbezahlt wird	$V_n = P \cdot \ddot{s}_{\overline{n}\vert}$
Monatsrate M zur Rückzahlung einer Kreditsumme V_0, zahlbar in 60 nachschüssigen Raten zu einem Jahreszinssatz i	$V_0 = M \cdot a_{\overline{60}\vert}$ mit : $i_{12} = (1+i)^{1/12} - 1$
Monatsrate M eines Leasings über einen Betrag V_0, zahlbar in 48 vorschüssigen Raten zu einem Jahreszinssatz i und mit einem vorgesehenen Restwert V_n bei Vertragsende	$V_0 = M \cdot \ddot{a}_{\overline{48}\vert} + V_n \cdot v^{48}$ mit : $i_{12} = (1+i)^{1/12} - 1$

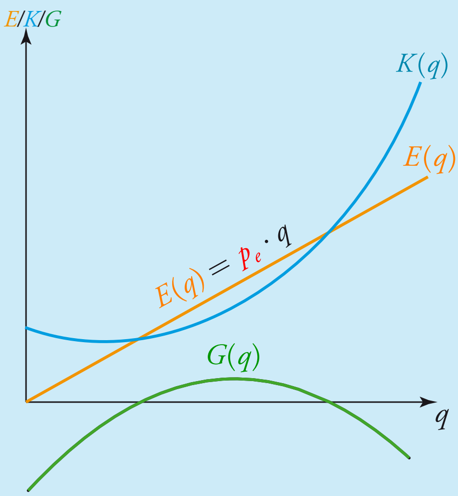
Preisbildung

Vollkommene Konkurrenz

Der Gleichgewichtspreis ergibt sich aus dem Schnittpunkt von Angebot und Nachfrage.



Für den vom Markt bestimmten Gleichgewichtspreis p_e stellt sich anschliessend die Frage: Welche Menge q muss produziert werden, um den Gewinn $G(q)$ zu maximieren?



$$G(q) = E(q) - K(q)$$

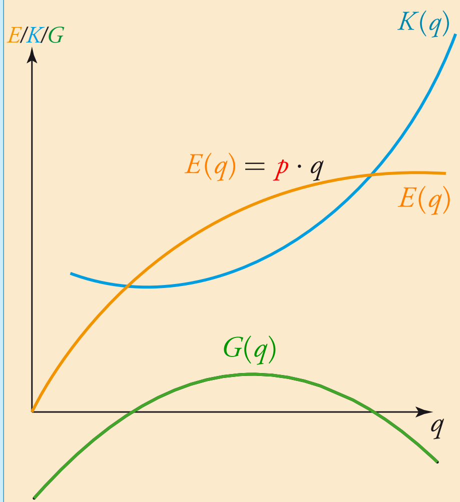
Monopol

Im Gegensatz zur vollkommenen Konkurrenz kann der Monopolist den Preis selbst festlegen.

Die Nachfragefunktion ist dem Monopolisten bekannt und liegt in einer der folgenden Formen vor:

$$q = ap + b \quad \text{oder} \quad p = aq + b$$

Die Frage lautet:
Welche Menge q muss produziert werden, um den Gewinn $G(q)$ zu maximieren?



$$G(q) = E(q) - K(q)$$

Nachdem die Menge q bestimmt wurde, kann anschliessend der Preis p ermittelt werden, zu welchem diese Menge abgesetzt werden kann (optimaler Preis).