Examen suisse de maturité, session d'hiver 2011

Mathématiques niveau normal

Candidat : Nom : . . . . Prénom : . . . . Groupe : . . . .

Correcteur : Date : . . . . Signature : . . . . Note :

Durée : 4 heures

Pour obtenir la note 6, il faut résoudre correctement et complètement les problèmes 1 et 2 ainsi que deux des trois problèmes suivants. Le nombre de points maximum est 50.

Problème 1 (obligatoire, 15 points)

a) Trouver les zéros, les sommets et les points d'inflexion de la fonction $f(x) = x^3 - 2x$, puis dessiner soigneusement le graphe de f .

b) La fonction $g(x) = 2 + \dfrac{2}{x-1}$ possède une asymptote horizontale et une asymptote verticale. Donner les équations de ces asymptotes, puis dessiner soigneusement le graphe de g dans le même repère que le graphe de f .

c) Calculer les points d'intersection des graphes de f et g .

d) Montrer que les graphes de f et g admettent, à l'origine, une tangente commune.

e) Calculer l'angle aigu formé par la tangente au graphe de f en $x = 2$ et la tangente au graphe de g en $x = 2$.

f) Calculer l'aire de la surface fermée comprise entre les graphes de f et g .

Problème 2 (obligatoire, 15 points)

On donne les points $A(-4;-3)$ et $B(4;3)$ du plan.

a) Donner une équation du cercle c dont le segment AB est un diamètre.

b) Donner une équation de la droite d qui passe par A et B.

c) Déterminer par calculs l'équation d'une droite p parallèle à la droite d et située à distance 4 de d.

d) Calculer les points d'intersection de la droite p et du cercle c.

e) Donner les coordonnées de tous les points du plan qui forment avec les points A et B un triangle rectangle d'aire égale à 20.

f) Donner les coordonnées d'un point C qui forme avec les points A et B un triangle isocèle d'aire égale à 20.

Problème 3 (à choix avec les problèmes 4 et 5, 10 points)

4 boules rouges et 2 boules bleues sont placées dans un chapeau.

Mathilde et Sophie jouent au jeu suivant : chacune tire alternativement une boule jusqu'à ce que l'une des deux tire une boule bleue. Cette joueuse perd alors la partie et le jeu s'arrête. C'est Sophie qui effectue le premier tirage.

Le jeu s'effectue dans un premier temps sans remise.

a) Quelle est la probabilité que Sophie gagne ?

b) Sachant que Mathilde a perdu, quelle est la probabilité que cela soit à son 2$^{\text{ème}}$ tirage ?

Le jeu s'effectue ensuite avec remise.

c) Quelle est la probabilité que le jeu se termine au 4$^{\text{ème}}$ tirage ?

d) Quelle est la probabilité que le jeu se termine après plus de 3 tirages ?

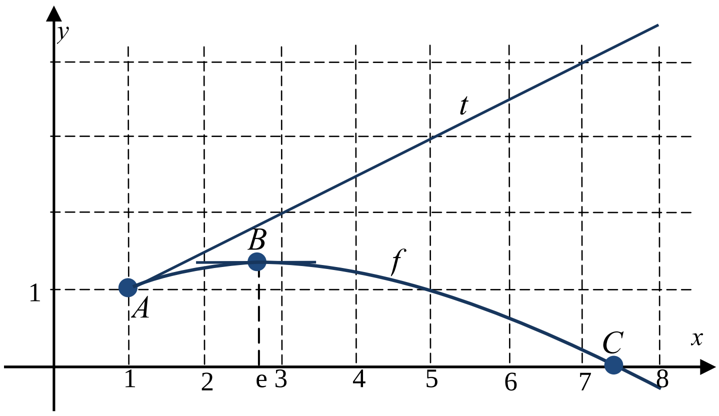
Problème 4 (à choix avec les problèmes 3 et 5, 10 points)

Le graphe de la fonction f définie sur $[1;+\infty[$ est représenté ci-dessous.

On note f' la dérivée de f sur cet intervalle.

La droite t est tangente au graphe de f au point $A(1;1)$.

La tangente au graphe de f au point B d'abscisse e est parallèle à l'axe Ox.



1) Par lecture graphique.

   a) Donner la pente de la droite t.

   b) Déterminer $f'(1)$ et $f'(e)$.

   c) Déterminer les réels x de l'intervalle $[1;8]$ qui vérifient $f'(x) \leq 0$.

   d) En traçant le plus précisément possible la tangente au graphe de f au point C, lire la valeur de la dérivée en ce point.

2) On admet que la fonction f est définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{2}(2 - \ln(x))$.

   e) Calculer l'ordonnée du point B d'abscisse e.

   f) Déterminer l'abscisse du point C, intersection du graphe de f avec l'axe Ox.

3) La dérivée f' de f est définie sur $[1;+\infty[$ par $f'(x) = k \cdot \ln\left(\frac{e}{x}\right)$ où k est un nombre réel donné.

   g) Vérifier le résultat donné pour $f'(e)$ à la question 1b).

   h) Déterminer la valeur de k à l'aide de la réponse donnée en 1a).

   i) Donner une équation de la tangente au graphe de f au point C.

   j) Déterminer les valeurs exactes des coordonnées du point d'intersection I de la droite t et de la tangente au graphe de f au point C.

Problème 5 (à choix avec les problèmes 3 et 4, 10 points)

La droite *a* passe par le point $A(2;2;2)$ et elle est parallèle au vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.
La droite *b* passe par les points $B(2;0;3)$ et $C(0;3;3)$.

a) Donner des équations paramétriques des droites *a* et *b*.

b) Vérifier que les droites *a* et *b* sont sécantes et calculer les coordonnées du point d'intersection.

c) Calculer les coordonnées des points d'intersection des droites *a* et *b* avec les plans de références.

d) Dessiner ci-dessous les *parties visibles* des droites *a* et *b*.

e) Donner une équation paramétrique du plan π qui contient les droites *a* et *b*.

f) Dessiner ci-dessous les traces du plan π.

g) Calculer les coordonnées du point d'intersection du plan π et de la droite *d* d'équation $d: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \alpha \end{cases}$, puis dessiner encore la *partie visible* de cette droite.